30/10/2018.

Παρατηρηση: Ένα σύνολο που έχει τα στοιχεία του διατεταγμένα ζεύγη δεν είναι πάντα καρτεσιανό γινόμενο 2 συνόλων.

πχ $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Ορίζοντας όμως ως A το σύνολο που περιέχει όλα τα πρώτα στοιχεία των διατεταγμένων ζευγών.

Ορίζοντας όμως ως B το σύνολο που περιέχει όλα τα πρώτα στοιχεία των διατεταγμένων ζευγών.

$A=\{1,2\}$ $\quad B=\{2,3\}$

$\{(1,2),(2,3),(1,3)\} \subseteq A\times B$

Όμως εδώ ο εγκλεισμός είναι γνήσιος εφόσον
$(2,2)\in A\times B$ ενώ $(2,2)\notin\{\ldots\}$

Συλλογή Συνόλων: Ονομάζουμε ένα σύνολο του οποίου όλα τα στοιχεία του είναι σύνολα

πχ $Z=\{\{1,2,4\},\{2,5\},\{2,3,7\}\}$

Αν Z είναι μια συλλογή συνόλων, ορίζουμε την τομή της Z $\cap Z=\{x,\ \forall X\in Z\ \ x\in X\}$
και ένωση της Z: $\cup Z=\{x:\ \exists X\in Z\ \ x\in X\}$

πχ $\cap Z=\{2\}$
$\cup Z=\{1,2,3,4,5,7\}$

Ειδικότερα, αν $\mathcal{Z} = \{A, B\}$ $\quad \cap \mathcal{Z} = A \cap B$

$\cup \mathcal{Z} = A \cup B$

Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και $E \subseteq \Omega$ $(E \neq \phi)$
Μια συλλογή συνόλων $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται κάλυψη ή κάλυμμα του E αν $E \subseteq \mathcal{Z}$.

Μια συλλογή μη κενών συνόλων $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ λέγεται διαμέριση του Ω.

Αν (i) $\Omega = \cup \mathcal{Z}$

(ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{Z}$ με $x \neq y$ ισχύει $x \cap y = \phi$.

Παράδειγμα:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$G = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

Πρόταση: Αν $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ δύο διαμερίσεις ενός συνόλου Ω ώστε $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$ ώστε $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.

Απόδειξη:

Αρκεί ν.δ.ο. $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{Z}_1$

Έστω $x \in \mathcal{Z}_2$ τότε $x \neq \phi$ (Από τον ορισμό της διαμέρισης τότε υπάρχει $x \in X$)

Άρα $x \in \cup \mathcal{Z}_2$.

Όμως $\cup \mathcal{Z}_1 = \Omega$
$\cup \mathcal{Z}_2 = \Omega$
(Αφού οι $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ είναι διαμερίσεις του Ω).

Άρα $x \in \cup \mathcal{Z}_1$

Άρα υπάρχει $y \in Z_1$ ώστε $x \in Y$.
Εφόσον από υπόθεση $Z_1 \subseteq Z_2$ συμπεραίνουμε ότι $y \in Z_2$.
Αφού $x \in X$ και $x \in Y$ έχουμε $X \cap Y \neq \phi$
Εφόσον X, Y ανήκουν στη διαμέριση Z_2 και $X \cap Y \neq \phi$
συμπεραίνουμε ότι $X = Y$
Αφού $Y \in Z_1$ συμπεραίνουμε ότι $X \in Z_1$.
άρα $Z_2 \subseteq Z_1$
οπότε $Z_1 = Z_2$.

Παρατήρηση:

Έστω Z μια συλλογή συνόλων και τυχόν x.

$x \notin \cap Z \Leftrightarrow \sim(x \in \cap Z) \Leftrightarrow \sim(\forall X \in Z : x \in X)$
$\Leftrightarrow \exists X \in Z : (\sim x \in X) \Leftrightarrow \exists X \in Z (x \notin X)$

$x \notin \cup Z \Leftrightarrow \sim(x \in \cup Z) \Leftrightarrow \sim(\exists X \in Z : x \in X)$
$\Leftrightarrow \forall X \in Z : (x \in X) \Leftrightarrow \forall X \in Z (x \notin X)$

Παραδείγματα:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad E = \{1, 3, 5\}$

$Z_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{4\}\}$
Δεν είναι διαμέριση αλλά είναι κάλυμμα του Ω.
(και του E) αφού $\cup Z_1 = \Omega$.
$Z_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$
Δεν είναι διαμέριση του Ω. και είναι κάλυμμα του E.

Άσκηση:

Δίνεται $A = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$
$P(A) = \{\{\phi\}, \phi, \{\{\phi, \{\phi\}\}\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi\}\}$
$\{\{\phi\}, \{\phi\{\phi\}\}\}, A\}$.